Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Mirna Mikić

Osnovni principi kombinatorike u teoriji vjerojatnosti

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Mirna Mikić

Osnovni principi kombinatorike u teoriji vjerojatnosti

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Poznato nam je da se različite grane matematike isprepliću: jedna grana matematike nam može pomoći u rješavanju problema iz druge grane, stoga ne čudi što su kombinatorika i teorija vjerojatnosti, također, povezane.

Za početak ovog diplomskog rada vratit ćemo se u povijest i pogledati kada su to ljudi počeli s istraživanjem kombinatorike i teorije vjerojatnosti te koji su se značajni matematičari takvim problemima bavili. Zatim ćemo navesti osnove kombinatorike koje će nam pomoći pri traženju odgovora na pitanje na koliko se načina nešto može odabrati. Nadalje, osnove teorije vjerojatnosti, klasična definicija vjerojatnosti i sama svojstva vjerojatnosti pomoći će nam u daljnjem radu kako bismo mogli primijetiti povezanost ovih dviju grana matematike. Bavit ćemo se i uvjetnom vjerojatnošću te nezavisnošću događaja. Na raznim zanimljivim primjerima vidjet ćemo kako se kombinatorni principi primjenjuju na vjerojatnosnim problemima. U kakvoj su vezi formula uključivanja-isključivanja i Sylvesterova formula? Kolika je vjerojatnost da ne dobijete niti jednu jaku kartu, a kolika da odaberete robu s greškom? Kako nam kombinatorika pomaže u tome? To su samo neka od pitanja na koja ćemo pronaći odgovor u ovom diplomskom radu.

1 Povijesni pregled

Ljudi su oduvijek iskušavali svoju sreću pa nije ni čudno da se iz zanimanja za igre na sreću rodila kombinatorika. Sve je počelo kockicom, ali ne kockicom koju znamo u današnjem obliku. Prvi dokazi o igrama na sreću su bili astragaloi koji datiraju oko 3500. godine prije Krista [3]. To su bile posebne kosti ovčjih papaka koje su imale dvije zaobljene plohe i četiri kvadrata gotovo jednakih veličina. Tada su se ljudi kladili na četiri moguća ishoda, to jest na koju će od četiri kvadratne plohe pasti kockica. Astragaloima su se služili i Egipćani, Babilonci i Rimljani koji su strast prema kocki naslijedili od Etruščana. Igre na sreću bile su popularne i u drevnoj Kini i Indiji. Indijski matematičari su rješavali različite probleme vjerojatnosti u religiozne svrhe te su jedni od prvih koji su se bavili permutacijama i kombinacijama.

Liber de ludo aleae ili *Knjiga o bacanju kocke* autora Girolama Cardana nastala je u 16. stoljeću iako je objavljena tek 87 godina nakon njegove smrti 1663. godine. Osim problema računanja vjerojatnosti dobitka, Cardano piše i o tome kako varati. Dakle, u ovom djelu se radi o kombinatornoj vjerojatnosti, a također se može pronaći i klasična definicija vjerojatnosti. Ipak, nastanak teorije vjerojatnosti smješta se u 17. stoljeće uspostavljanjem temelja kombinatorne teorije vjerojatnosti u dopisivanju Blaisea Pascala i Pierrea de Fermata, a njihove rezultate nastavlja Christiaan Huygens. Blaise Pascal se matematikom bavio iz hobija, a 1654. godine obratio mu se kockar Chevalier de Méré s dva problema. Prvi problem je bio isplati li se kladiti da će u 24 bacanja para kockica barem jednom pasti par šestica, a drugi problem bio je kako raspodijeliti uloge u slučaju prijevremeno prekinute igre na sreću u kojoj nema neriješenog ishoda te je pobjednik onaj koji prvi pobijedi u određenom broju krugova. Ti problemi izazvali su komunikaciju između Pascala i de Fermata zbog koje je došlo do uspostavljanja teorije vjerojatnosti. Više o ovim problemima i rješenjima problema čitatelj može pročitati u [2]. Huygens na temelju njihovih rezultata objavljuje knjigu *De ratiociniis in ludo aleae* 1657. godine, a to je prva matematička knjiga o vjerojatnosti u povijesti.

Važno je spomenuti i knjigu *Ars conjectandi* Jacoba Bernoullija, objavljenu 1713., koja se smatra i prvim kompletnim pregledom teorije vjerojatnosti te njime teorija vjerojatnosti postaje zasebna matematička disciplina. *Ars conjectandi* se sastoji od četiri dijela, a u njoj se nalazi prva teorijska diskusija vjerojatnosti kao broja između nula i jedan. U spomenutoj knjizi, čitatelj može pronaći i filozofski pristup vjerojatnosti, definiciju vjerojatnosti *a priori* i *a posteriori* te još neke vjerojatnosne pojmove kao što su npr. pojam očekivanja, Bernoullijev pokus, Bernoullijeva distribucija, suvremeni pojmovi permutacija i kombinacija, primjena kombinatorike na vjerojatnosne probleme u igrama na sreću i slično. Bernoulli nije uspio dovršiti svoje djelo, ali je njegove rezultate nadopunio i pojednostavio Abraham de Moivre koji prvi daje klasičnu definiciju vjerojatnosti kao omjer broja povoljnih i broja mogućih ishoda. Njegovo glavno djelo je *The Doctrine of Chances: A method of calculating the probabilities of events in play* [5] objavljeno 1711. godine.

Postoje i mnogi drugi matematičari koji su pridonijeli razvoju kombinatorike i teorije vjerojatnosti, a neki od njih su: Daniel Bernoulli, Thomas Bayes, Jean D'Alembert, Pierre-Simon Laplace te Siméon-Denis Poisson [2].

2 Osnovni principi kombinatorike

Često se susrećemo s problemima određivanja broja elemenata nekog skupa, odnosno prebrojavanja nekog konačnog skupa ili njegovog podskupa. Svaki takav problem postavlja nam pitanje *na koliko se načina nešto može odabrati* te nam pri odgovoru mogu pomoći osnovni kombinatorni principi. Kod mnogih kombinatornih problema, rješenje je zasnovano na dvama osnovnim principima prebrojavanja: princip sume i princip produkta, te ćemo ih u nastavku detaljnije obraditi.

1. **Princip sume**

   Neka su S_1 i S_2 konačni međusobno disjunktni skupovi. Tada je njihova unija $S_1 \cup S_2$ također konačan skup [7] te je očito

   $$k(S_1 \cup S_2) = k(S_1) + k(S_2).$$

   Dokaz prethodne jednakosti možemo provjeriti i *na prste*, no u nastavku čitatelj može vidjeti iskaz i dokaz Principa sume, gdje ćemo pokazati da se prethodna jednakost može poopćiti i na n skupova.

   Teorem 2.1 (Princip sume) *Neka su skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konačni i međusobno disjunktni. Tada je i skup $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ također konačan i vrijedi:*

   $$k(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = k(S_1) + k(S_2) + \cdots + k(S_n).$$

   Dokaz. Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije.

BAZA INDUKCIJE

Znamo da za $n = 2$ tvrdnja

$$k(S_1 \cup S_2) = k(S_1) + k(S_2)$$

vrijedi za konačne, međusobno disjunktne skupove S_1 i S_2.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE

Pretpostavimo da za $n = l, l \geq 2$ vrijedi

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l) = k(S_1) + k(S_2) + \cdots + k(S_l),$$

pri čemu su skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_l$ konačni i međusobno disjunktni.

KORAK INDUKCIJE

Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = l + 1$.

Pretpostavimo da su skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_l, S_{l+1}$ konačni i međusobno disjunktni. Za početak, primijenimo bazu indukcije jer je skup S_{l+1} konačan i disjunktan sa svakim od skupova $S_1, S_2, \ldots, S_l$, a prema pretpostavci indukcije je skup $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l$ konačan pa i disjunktan sa skupom S_{l+1}. Stoga vrijedi:

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l \cup S_{l+1}) = k(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l) + k(S_{l+1}).$$

Sada po pretpostavci indukcije slijedi:

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l \cup S_{l+1}) = k(S_1) + k(S_2) + \cdots + k(S_l) + k(S_{l+1}).$$

$\square$

2. **Princip produkta**

Ako su S_1 i S_2 konačni skupovi, onda je i Kartezijev produkt $S_1 \times S_2$ konačan skup [7] i vrijedi

$$k(S_1 \times S_2) = k(S_1) \cdot k(S_2).$$

Kao i princip sume, princip produkta možemo poopćiti matematičkom indukcijom te stoga vrijedi sljedeće:

Teorem 2.2 (Princip produkta) *Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_m$ konačni skupovi. Tada je Kartezijev produkt $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$ također konačan skup i vrijedi*

$$k(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m) = k(S_1) \cdot k(S_2) \cdot \ldots \cdot k(S_m).$$

Dokaz. Kao i kod principa sume, i princip produkta dokazujemo metodom matematičke indukcije. Dokaz ćemo provesti za $m = 2$, a ostalo se dokazuje analogno kao i za princip sume.

Neka je, na primjer, $S_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ i $S_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Tada znamo da je $k(S_1) = l$ i $k(S_2) = n$. Uočimo sada

$$\begin{aligned} S_1 \times S_2 &= \{(x_i, y_j) : x_i \in S_1, y_j \in S_2\} \\ &= \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \ldots, l, j = 1, 2, \ldots, n\} \\ &= \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_1, y_n), \\ &\quad (x_2, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_2, y_n), \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad (x_l, y_1), (x_l, y_2), \ldots, (x_l, y_n)\}. \end{aligned}$$

Zaključujemo

$$k(S_1 \times S_2) = l \cdot n = k(S_1) \cdot k(S_2).$$

$\square$

Ovaj princip često formuliramo i na sljedeći način:

Teorem 2.3 (Teorem o uzastopnom prebrojavanju) *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ konačni skupovi i neka je $T \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ skup uređenih m-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ definiranih na sljedeći način: prva komponenta a_1 može se birati na k_1 različitih načina; za svaku već izabranu prvu komponentu, drugu komponentu a_2 možemo birati na k_2 različitih načina itd. Za svaki izbor komponenata $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$, m-tu komponentu a_m možemo birati na k_m različitih načina. Tada skup T ima $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m$ elemenata, odnosno $k(T) = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m$.*

Dokaz. Ovaj teorem, također, dokazujemo metodom matematičke indukcije. Kod baze indukcije uzimamo da je $m = 2$, a ta tvrdnja vrijedi upravo zbog principa produkta, tj. ako smo a_1 odabrali na k_1 načina i a_2 na k_2 načina tada je $k(T) = k_1 \cdot k_2$. Nadalje, kod pretpostavke indukcije pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za $m-1$, tj. odabiremo a_1 na k_1 načina, a_2 na k_2 načina, $\ldots$, a_{m-1} na k_{m-1} načina te iz toga slijedi $k(T) = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_{m-1}$. Na kraju, uz pomoć baze i pretpostavke indukcije, u koraku indukcije lako dokazujemo da je za $T \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$

$$k(T) = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m.$$

$\square$

Primjer 2.1 *U jednom plesnom klubu od 20 osoba trebamo odabrati predsjednika, potpredsjednika, tajnika i blagajnika (tako da niti jedna osoba ne bude dva puta odabrana). Na koliko načina to možemo napraviti?*

Rješenje Za početak biramo predsjednika pa njega možemo odabrati na 20 načina, budući da nijedna osoba još nije dobila niti jednu ulogu. Zatim, budući da je predsjednik izabran, potpredsjednika možemo odabrati na 19 načina, tj. od preostalih 19 osoba. Nadalje, tajnika možemo odabrati na 18 načina, a zatim blagajnika na 17 načina. Sada, prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, ukupan broj načina na koje možemo provesti ovaj izbor je $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$.

U nastavku ćemo spomenuti teoreme koji će nam pomoći pri prebrojavanju konačnih skupova te samim time i u rješavanju kombinatornih problema.

Teorem 2.4 *Ako su A i B konačni skupovi (ne nužno disjunktni), tada vrijedi*

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B). \tag{1}$$

Dokaz. Uniju skupova A i B možemo zapisati na sljedeći način:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A),$$

a kako su ti skupovi međusobno disjunktni, prema principu sume slijedi

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B \setminus A). \tag{2}$$

Nadalje, ako B zapišemo kao uniju dva međusobno disjunktna skupa $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, ponovo prema principu sume slijedi

$$k(B) = k(B \setminus A) + k(A \cap B). \tag{3}$$

Sada iz (2) i (3) slijedi tražena jednakost. $\square$

Generalizacijom prethodnog teorema dolazimo do sljedeće bitne tvrdnje:

Teorem 2.5 (Formula uključivanja - isključivanja) *Ako su $A_1, A_2, \dots, A_m$ konačni skupovi, tada vrijedi*

$$\begin{aligned} k\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} k(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq m} k(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1\leq i<j<k\leq m} k(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{m+1} k\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Prethodni teorem se dokazuje metodom matematičke indukcije, analogno kao i Sylvesterova formula koju ćemo u daljnjem tekstu dokazati, stoga ovaj dokaz u nastavku ne provodimo.

Napomena Za konačne skupove A i B, takve da je $A \subseteq B$, vrijedi

$$k(B \setminus A) = k(B) - k(A). \tag{5}$$

Iz prethodne formule i jednakosti (3), za proizvoljne konačne skupove, slijedi

$$k(B \setminus A) = k(B) - k(A \cap B). \tag{6}$$

Primjer 2.2 *U nekom plesnom klubu ima 50 plesača. 30 plesača se natječe u kategoriji jazz dance-a, 16 u kategoriji break dance-a, dok ih 15 ne ide na natjecanje. Koliko se plesača natječe u obje kategorije? Koliko se plesača natječe samo u kategoriji jazz dance-a?*

Rješenje Označimo s P skup svih plesača u plesnom klubu, s J skup plesača koji se natječu u kategoriji jazz dance-a, s B skup svih plesača koji se natječu u kategoriji break dance-a, a s N skup svih plesača koji ne idu na natjecanje. Sada imamo:

$$k(P) = 50, k(J) = 30, k(B) = 16, k(N) = 15.$$

Skupovi $J \cup B$ i N su disjunktni te vrijedi $P = (J \cup B) \cup N$. Iz principa sume slijedi

$$k(P) = k(J \cup B) + k(N),$$

stoga je

$$k(J \cup B) = k(P) - k(N) = 50 - 15 = 35.$$

Skup $J \cap B$ predstavlja skup svih plesača koji se natječu u obje kategorije, jazz dance i break dance. Njihov broj odredit ćemo pomoću formule dane u Teoremu 2.4.

Sada je

$$k(J \cap B) = k(J) + k(B) - k(J \cup B) = 30 + 16 - 35 = 11.$$

Nadalje, kako bismo dobili broj plesača koji se natječe samo u jazz dance kategoriji trebamo naći $k(J \setminus B)$, a to ćemo, pomoću jednakosti (6), napraviti na sljedeći način

$$k(J \setminus B) = k(J) - k(J \cap B) = 30 - 11 = 19.$$

Kombinatorni zadaci postavljat će nam pitanje određivanja broja načina na koji se neki objekti mogu razmjestiti po nekom zadanom pravilu. Razni problemi mogu zahtijevati da taj razmještaj bude uređen ili neuređen, s ponavljanjem ili bez ponavljanja. Za rješavanje tih problema koristimo varijacije, permutacije i kombinacije koje ćemo definirati u nastavku, a o kojima čitatelj može više pročitati u [6].

2.1 Varijacije

Definicija 1 *Neka je A n-člani skup i neka je $r \in \mathbb{N}$ takav da je $r \leq n$. Varijacija r-tog razreda u skupu A je svaka uređena r-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ čije su sve komponente $a_1, a_2, \ldots, a_r$ međusobno različiti elementi skupa A.*

Sa $V_n^{(r)}$ označavat ćemo broj svih varijacija r-tog razreda u n-članom skupu. Kako komponente moraju biti različite, prvu možemo odabrati na $k_1 = n$ načina te nakon što smo odabrali tu komponentu, preostaje nam još $n - 1$ izbora, stoga drugu komponentu možemo odabrati na $k_2 = n - 1$ načina, ... Ako smo odabrali j komponenata, $j < r$, tj. odabrani su $a_1, a_2, \ldots, a_j$, sljedeću komponentu a_{j+1} možemo odabrati na $k_{j+1} = n - j$ načina. Sada primjenom teorema o uzastopnom prebrojavanju slijedi da je ukupan broj izabranih r-torki jednak

$$V_n^{(r)} = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r = n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n - r + 1).$$

Ovu definiciju ilustrirat ćemo sljedećim primjerom.

Primjer 2.3 *Na koliko načina možemo napraviti sendvič ako možemo odabrati tri sastojaka (imajući na umu da ne možemo dva puta odabrati isti sastojak) od ponuđenih osam: šunka, majoneza, ajvar, salata, kiseli krastavci, kukuruz, sir, senf?*

Rješenje Nas zapravo zanima broj varijacija bez ponavljanja trećeg razreda u 8-članom skupu, a to ćemo izračunati na sljedeći način

$$V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

2.1.1 Varijacije s ponavljanjem

Definicija 2 *Neka je A skup od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$. Varijacija s ponavljanjem r-tog razreda u skupu A je svaka uređena r-torka elemenata iz skupa A (članovi te r-torke mogu biti međusobno jednaki, može biti $r > n$).*

Broj svih varijacija s ponavljanjem u n-članom skupu A označit ćemo s $\bar{V}_n^{(r)}$. Primjenom principa produkta slijedi

$$\bar{V}_n^{(r)} = k(\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{r\text{-puta}}) = [k(A)]^r = n^r.$$

Primjer 2.4 *Na koliko načina možemo smisliti pin za mobitel ako znamo da nam je za pin potrebno 4 znamenke?*

Rješenje Znamo da za jednu znamenku pina možemo odabrati bilo koju od 10 znamenki (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) te je traženi broj načina

$$\bar{V}_{10}^4 = 10^4 = 10000.$$

2.2 Permutacije

Definicija 3 *Permutacija u n-članom skupu A je svaka varijacija n-tog razreda u skupu A.*

Dakle, možemo zaključiti da je permutacija u n-članom skupu A svaka uređena n-torka iz $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{-puta}}$ čije su komponente međusobno različite.

Ako sa P_n označimo broj svih permutacija u n-članom skupu, tada vrijedi

$$P_n = V_n^{(n)} = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!.$$

Primjer 2.5 *Na početku koreografije 6 plesačica ulazi na pozornicu, u redu, jedna iza druge. Na koliko načina plesačice mogu stajati u redu za ulazak na pozornicu?*

Rješenje Tražimo broj svih permutacija u 6-članom skupu, a to je

$$P_6 = 6! = 720.$$

2.2.1 Permutacije s ponavljanjem

Neka je A skup od n elemenata od kojih su k_1 međusobno jednaki, k_2 međusobno jednaki, $\ldots$, k_r međusobno jednaki i $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$. Permutacija s ponavljanjem nad skupom A je bilo koja uređena n-torka elemenata iz skupa A.

Označimo li s $\bar{P}_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_r)}$ ukupan broj permutacija s ponavljanjem (broj svih permutacija od n elemenata od kojih je k_1 jedne vrste, k_2 druge vrste, $\ldots$, k_r r-te vrste), vrijedi

$$\bar{P}_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_r)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_r!}.$$

Primjer 2.6 *Na koliko načina možemo podijeliti kostime za koreografiju za 14 djece, ako imamo 5 plavih kostima, 5 crvenih i 4 žutih?*

Rješenje Na raspolaganju nam je 5 plavih kostima, 5 crvenih kostima i 4 žutih koje možemo podijeliti djeci, stoga govorimo o permutacijama s ponavljanjem, pa ćemo ukupan broj izračunati na sljedeći način

$$\bar{P}_{14}^{(5,5,4)} = \frac{14!}{5! \cdot 5! \cdot 4!} = 252252.$$

2.3 Kombinacije

Definicija 4 *Neka je A n-člani skup i $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. Kombinacija r-tog razreda u skupu A jest svaki r-člani podskup od A.*

Broj svih kombinacija r-tog razreda u n-članom skupu označavat ćemo s $C_n^{(r)}$ i računamo ga na sljedeći način

$$C_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}.$$

Primjer 2.7 *Na koliko se načina od 15 ljudi mogu napraviti dvije skupine, jedna od 7 i jedna od 8 ljudi?*

Rješenje Tražimo broj svih kombinacija 7-og razreda u 15-članom skupu, a to je, prema prethodnoj formuli, jednako

$$C_{15}^{(7)} = \binom{15}{7} = \frac{15!}{8! \cdot 7!} = 6435.$$

2.3.1 Kombinacije s ponavljanjem

Definicija 5 *Neka je A n-člani skup i $r \in \mathbb{N}$. Kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda u skupu A je svaka neuređena r-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ (u kojoj elementi mogu biti međusobno jednaki) elemenata iz skupa A.*

Broj svih kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda u n-članom skupu označavat ćemo s $\bar{C}_n^{(r)}$ i vrijedi

$$\bar{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Primjer 2.8 *Želimo napraviti buket od 7 cvjetova za osobu koja će diplomirati, a u ponudi su nam ruže, ljiljani i orhideje. Na koliko načina možemo napraviti taj buket?*

Rješenje Budući da imamo tri vrste cvijeća, slijedi da je $n = 3$, a trebamo napraviti buket od 7 cvjetova pa je $r = 7$. Stoga je

$$\bar{C}_3^{(7)} = \binom{3+7-1}{7} = 36.$$

3 Vjerojatnosni prostor i klasična definicija vjerojatnosti

Teorija vjerojatnosti je matematička disciplina koja je lako primjenjiva u svakodnevnom životu, stoga ne čudi što je mnogima to jedna od najzanimljivijih grana matematike, najviše zbog svoje primjene u igrama na sreću. U nastavku ćemo navesti neke osnovne pojmove iz teorije vjerojatnosti koje ćemo kasnije koristiti u rješavanju zanimljivih primjera.

Za početak spomenimo pokus (eksperiment) i njegov ishod (realizacija pokusa), a to su pojmovi koji su nam intuitivno jasni. Ono što treba utvrditi prije samog izvođenja pokusa jest skup uvjeta tog pokusa te što su mogući ishodi jer ako se to ne utvrdi može doći do različitih pogleda na ishode pokusa (npr. netko može kao ishod gledati pobjedu/poraz u igri dok netko kao ishod gleda trajanje igre). Elementarni događaj je svaki mogući ishod jednog izvođenja slučajnog pokusa i njega ćemo označavati s ω.

Definicija 6 *Prostor elementarnih događaja (skup elementarnih događaja) slučajnog pokusa je skup Ω, sa svojstvom da svakom ishodu pokusa odgovara točno jedan ele-*

ment tog skupa i obratno, da svakom elementu skupa Ω odgovara točno jedan mogući ishod promatranog pokusa.

Definicija 7 *Događaj je svaki podskup prostora elementarnih događaja pridruženog danom slučajnom pokusu.*

Kod slučajnih pokusa ne možemo predvidjeti ishod te ako više puta ponovimo pokus uzastopni rezultati će se razlikovati, budući da ishod ovisi o mnogo faktora koje često ne možemo niti odrediti niti na njih utjecati. Tu se javlja teorija vjerojatnosti koja nam omogućava da odredimo stupanj mogućnosti pojave slučajnog događaja te da odlučimo koji je događaj vjerojatniji.

Pokusi mogu biti različiti, a posebno su nam zanimljivi oni kod kojih je prostor elementarnih događaja konačan, a svaki pojedini ishod jednako moguć, jer nas upravo takvi pokusi dovode do klasične definicije vjerojatnosti.

Definicija 8 *Neka je Ω neprazan konačan skup, to jest $\Omega \neq \emptyset$ i $k(\Omega) < \infty$. Ako su svi ishodi u konačnom skupu elementarnih događaja Ω jednako mogući, vjerojatnost da se realizira događaj $A \subseteq \Omega$ jednaka je kvocijentu broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω, to jest*

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{\textit{broj povoljnih elementarnih događaja za } A}{\textit{broj svih mogućih elementarnih događaja}}.$$

Kako bismo mogli definirati vjerojatnost i vjerojatnosni prostor u općenitom smislu, za proizvoljni prostor elementarnih događaja Ω, potrebna nam je sljedeća definicija (vidi [1]).

Definicija 9 *Neka je $\Omega \neq \emptyset$. Familija skupova $\mathcal{F}$ koja sadrži podskupove skupa Ω naziva se σ-algebra ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{F}$,*
2. *ako je $A \in \mathcal{F}$ onda je i $A^{\mathsf{C}} \in \mathcal{F}$,*
3. *ako je dana familija skupova $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$ iz $\mathcal{F}$ onda je njihova unija također iz $\mathcal{F}$, tj. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.*

Definicija 10 *Neka je $\Omega \neq \emptyset$ skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra na njemu. Funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je vjerojatnost na Ω ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$,

2. $P(\Omega) = 1$,

3. *ako je dana familija međusobno disjunktnih skupova* $(A_i, i \in I)$ *iz* $\mathcal{F}$ *onda je*

$$P\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Prethodna svojstva nazivaju se aksiomi vjerojatnosti.

Definicija 11 *Uređena trojka* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *skupa* $\Omega \neq \emptyset$, σ*-algebre* $\mathcal{F}$ *na njemu i vjerojatnosti* $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *naziva se vjerojatnosni prostor.*

3.1 Osnovna svojstva vjerojatnosti

Aksiomi vjerojatnosti imaju za posljedicu neka svojstva vjerojatnosti koja ćemo u nastavku iskazati jer će nam biti potrebna prilikom rješavanja i boljeg razumijevanja zadataka.

Teorem 3.1 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Tada vrijedi:*

1. *Vjerojatnost suprotnog događaja*

   Neka je $A \in \mathcal{F}$ *događaj i* $A^C \in \mathcal{F}$ *njemu suprotan događaj. Tada je*

   $$P(A^C) = 1 - P(A).$$

   Dokaz. Znamo da su skupovi A i A^C disjunktni, to jest $A \cap A^C = \emptyset$. S druge strane, $A \cup A^C = \Omega$, a po drugom aksiomu vjerojatnosti je $P(\Omega) = 1$, stoga je $P(A \cup A^C) = 1$. Sada, prema trećem aksiomu vjerojatnosti, vrijedi

   $$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) = 1$$

   iz čega slijedi tražena jednakost. □

2. *Vjerojatnost praznog skupa (nemogućeg događaja)*

   $$P(\emptyset) = 0.$$

Dokaz. $\emptyset = \Omega^{\mathcal{C}}$ pa koristeći prethodno svojstvo dobivamo

$$P(\emptyset) = P(\Omega^{\mathcal{C}}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

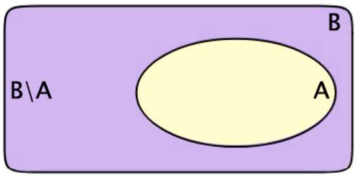
□

3. *Monotonost vjerojatnosti*

   Neka su $A, B \in \mathcal{F}$ događaji takvi da je $A \subseteq B$. Tada vrijedi

$$P(A) \leq P(B).$$

Dokaz. Kako je $A \subseteq B$, B možemo zapisati kao $B = A \cup (B \setminus A)$ (Slika 1.).



Slika 1.

Budući da smo B zapisali kao uniju dva disjunktna skupa, primjenom trećeg aksioma vjerojatnosti dobivamo

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Kako je prema prvom aksiomu vjerojatnosti $P(B \setminus A) \geq 0$, vrijedi da je

$$P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

što nam upravo daje traženu nejednakost.

Iz prethodnog računa možemo zaključiti da za dva događaja A i B, za koje vrijedi $A \subseteq B$, vjerojatnost događaja $B \setminus A$ računamo kao

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \tag{7}$$

□

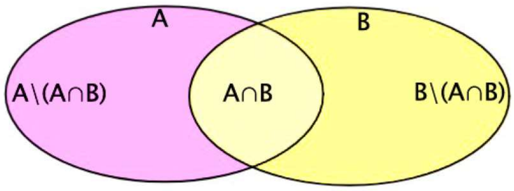
4. *Vjerojatnost unije dva događaja*

   Ako su $A, B \in \mathcal{F}$ ne nužno disjunktni događaji, tada je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dokaz. Kao što možemo vidjeti na Slici 2., $A \cup B$ možemo zapisati kao uniju disjunktnih skupova na sljedeći način

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$



Slika 2.

Prema trećem aksiomu vjerojatnosti i svojstvu (7), koje možemo primijeniti zbog $A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$, slijedi

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

□

5. *Prebrojiva ili σ-subaditivnost*

   Neka je $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$ familija događaja iz $\mathcal{F}$. Tada vrijedi
   $$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

6. *Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastuću familiju događaja*

   Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N})$ rastuća familija događaja iz $\mathcal{F}$, tj. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$. Tada vrijedi
   $$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

7. *Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajuću familiju događaja*

   Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N})$ padajuća familija događaja iz $\mathcal{F}$, tj. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$. Tada vrijedi
   $$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

Dokazali smo prva četiri svojstva budući da će nam biti potrebna u daljnjim primjerima, dok dokaze ostalih svojstava čitatelj može pronaći u [1].

3.2 Uvjetna vjerojatnost

Svakom događaju, u skladu s klasičnom definicijom vjerojatnosti, pridružili smo njegovu vjerojatnost koja je potpuno određena i ne mijenja se u postavljenom problemu. No, što ako promatramo vjerojatnost nekog događaja uz dodatne informacije o realizaciji slučajnog pokusa? Kako bismo odgovorili na ovo pitanje uvodimo pojam uvjetne vjerojatnosti.

Definicija 12 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $P(B) > 0$. Uvjetna vjerojatnost uz dani događaj B je funkcija $P_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$ definirana izrazom*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{8}$$

za svaki $A \in \mathcal{F}$.

Dokažimo da je ova funkcija vjerojatnost, tj. da zadovoljava aksiome vjerojatnosti.

1. U definiciji je B takav da je $P(B) > 0$, a kako je P vjerojatnost, vrijedi $P(A \cap B) \geq 0$ iz čega slijedi da je $P_B(A) \geq 0$.

2. $$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

3. Neka je dana familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I)$ iz $\mathcal{F}$.

   Tada je

$$\begin{aligned} P_B\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \frac{P\left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \bigcap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i \in I}(A_i \cap B)\right)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i \in I} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i \in I} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i \in I} P_B(A_i). \end{aligned}$$

□

Budući da govorimo o uvjetnoj vjerojatnosti, javlja nam se i pojam nezavisnosti događaja. Taj pojam nam je intuitivno jasan, npr. ako dva gimnastičara izvode istu vježbu, uspješnost izvedbe vježbe jednog gimnastičara ne ovisi o uspješnosti izvedbe drugog. Sada ćemo taj intuitivno jasan pojam zapisati i u matematičkom obliku.

Definicija 13 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Kažemo da su događaji* A *i* B *nezavisni ako vrijedi*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ovu definiciju možemo i generalizirati na proizvoljnu familiju događaja.

Definicija 14 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Kažemo da je proizvoljna familija događaja* $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$ *nezavisna ako za svaki konačan skup indeksa* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq I$ *vrijedi*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}).$$

Sada možemo primijetiti da ako imamo dva nezavisna događaja A i B, prema definiciji nezavisnosti i uvjetne vjerojatnosti vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

iz čega slijedi

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Stoga, možemo zaključiti da ako su dva događaja nezavisna, realizacija događaja A neće ovisiti o realizaciji događaja B.

4 Primjena kombinatornih principa na vjerojatnosne probleme

Vjerojatnost smo definirali klasičnom definicijom u kojoj pretpostavljamo da su svi ishodi u konačnom nepraznom skupu elementarnih događaja jednako mogući te vidimo da je vjerojatnost jednaka kvocijentu broja povoljnih i broja svih mogućih događaja, a ti brojevi zapravo predstavljaju kardinalne brojeve odgovarajućih skupova. Stoga, možemo zaključiti da će se računanje vjerojatnosti (u slučaju kada možemo primijeniti klasičnu definiciju vjerojatnosti) svesti na prebrojavanje elemenata skupova za što će nam koristiti kombinatorni principi koje smo upoznali. Za početak, prisjetimo se principa sume

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = k(S_1) + k(S_2) + \cdots + k(S_n),$$

gdje su dani skupovi konačni i međusobno disjunktni. Ako pretpostavimo da su naši skupovi zapravo događaji koji se međusobno isključuju, te da je $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq \Omega$ (pri čemu je Ω neprazan, konačan skup elementarnih događaja) kada prethodnu jednakost podijelimo s $k(\Omega)$ dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{k(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)}{k(\Omega)} &= \frac{k(S_1) + k(S_2) + \cdots + k(S_n)}{k(\Omega)} \\ &= \frac{k(S_1)}{k(\Omega)} + \frac{k(S_2)}{k(\Omega)} + \cdots + \frac{k(S_n)}{k(\Omega)}\end{aligned}$$

te iz klasične definicije vjerojatnosti slijedi

$$P(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = P(S_1) + P(S_2) + \cdots + P(S_n),$$

što je upravo treći aksiom vjerojatnosti u slučaju konačnog broja događaja.

Kao što smo i vidjeli, prethodna jednakost vrijedi u slučaju kada imamo konačne, međusobno disjunktne skupove. Ako se ne radi o međusobno disjunktnim skupovima, tada možemo primijeniti Teorem 2.4 u kojem imamo konačne, ne nužno disjunktne, skupove. Ako na skupove A i B, iz spomenutog teorema, gledamo kao na elemente iz neke σ-algebre na Ω te ako jednakost (1) podijelimo s $k(\Omega)$ dobivamo

$$\frac{k(A \cup B)}{k(\Omega)} = \frac{k(A)}{k(\Omega)} + \frac{k(B)}{k(\Omega)} - \frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)},$$

što je prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti ekvivalentno s

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

čime dobivamo četvrto svojstvo vjerojatnosti. Također, jednakost (7), dobivenu u dokazu svojstva monotonosti vjerojatnosti, možemo dobiti i iz jednakosti (5) dijeljenjem svakog člana s $k(\Omega)$ kao što je prethodno opisano, uz već spomenutu pretpostavku o konačnosti nepraznog skupa Ω.

Nadalje, na isti način kao što smo generalizirali tvrdnju Teorema 2.4 na formulu uključivanja-isključivanja, možemo generalizirati svojstvo vjerojatnosti unije dva događaja na vjerojatnost unije konačno mnogo događaja, kako bismo dobili takozvanu Sylvesterovu formulu.

Teorem 4.1 (Sylvesterova formula) *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i*

$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \in \mathcal{F}$ konačna familija događaja. Tada vrijedi

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).
\end{aligned}
$$

Dokaz. Sylvesterovu formulu dokazat ćemo metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$ imamo $P(A_1) = P(A_1)$ što očito vrijedi. Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi što smo dokazali u Teoremu 3.1 kao tvrdnju o vjerojatnosti unije dva događaja. Za $n = 3$ uzet ćemo $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$ te neka je $B = A_1 \cup A_2$. Sada vrijedi

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(B \cup A_3) = P(B) + P(A_3) - P(B \cap A_3) \\
&= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\
&= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) \\
&\quad - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\
&= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) \\
&\quad - (P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_3)) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) \\
&\quad - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3),
\end{aligned}
$$

čime smo dokazali Sylvesterovu formulu za $n = 3$.

Pretpostavimo sada da Sylvesterova formula vrijedi za sve familije od $n-1$ događaja. Nadalje, neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ te neka je

$$
B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, \;\; C_i = A_i \cap A_n, \;\; i = 1, 2, \ldots, n-1.
$$

Sada imamo

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right) = P(B \cup A_n) \\
&= P(B) + P(A_n) - P(B \cap A_n).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Budući je

$$
\begin{aligned}
P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n-1} P(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{1\le i<j<k\le n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)
\end{aligned}
$$

te

$$
\begin{aligned}
P(B\cap A_n) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\cap A_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)\right)\\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} C_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(C_i) - \sum_{1\le i<j\le n-1} P(C_i\cap C_j)\\
&+ \sum_{1\le i<j<k\le n-1} P(C_i\cap C_j\cap C_k) - \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} C_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i\cap A_n) - \sum_{1\le i<j\le n-1} P(A_i\cap A_j\cap A_n)\\
&+ \sum_{1\le i<j<k\le n-1} P(A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_n) - \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right),
\end{aligned}
$$

uvrštavanjem u (9) upravo dobivamo Sylvesterovu formulu. □

Sylvesterova formula korisna je za rješavanje različitih vjerojatnosnih problema te ćemo je u nastavku ilustrirati na nekoliko zanimljivih primjera.

Primjer 4.1 *U većini kartaških igara, korisne (jake) karte su A (as), K (kralj), Q (dama), J (dečko). Ako dijelimo 52 karte na 4 igrača, kolika je vjerojatnost da u jednom dijeljenju neki igrač ne dobije niti jednu korisnu kartu?*

Rješenje Odredit ćemo prvo $k(\Omega)$. Kako dijelimo 52 karte na 4 igrača, svaki igrač će dobiti slučajno podijeljenih 13 karata.

$$
k(\Omega) = C_{52}^{(13)} = \binom{52}{13}.
$$

Ono što se od nas traži u zadatku je da odredimo vjerojatnost da neki igrač nije dobio niti jednu korisnu kartu. Kako to može biti bilo koji od naših četiri igrača, mi ćemo tražiti $P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right)$, gdje je $A_i = \{i\text{-ti igrač nema niti jednu korisnu kartu}\}$. Našu traženu vjerojatnost ćemo izračunati upravo koristeći Sylvesterovu formulu

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le 4} P(A_i\cap A_j)\\
&+ \sum_{1\le i<j<k\le 4} P(A_i\cap A_j\cap A_k) - P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)
\end{aligned}
$$

Korisnih karata ima 16, a kako je $52 - 16 = 36$ imamo sljedeće

$$k(A_i) = C_{36}^{(13)} = \binom{36}{13}, i = 1, 2, 3, 4,$$

pa dobivamo

$$P(A_i) = \frac{\binom{36}{13}}{\binom{52}{13}}.$$

Kako bismo izračunali $P(A_i \cap A_j)$ moramo znati da u ovom slučaju ni igrač i ni igrač j nisu dobili korisne karte pa je

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{\binom{36}{13}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{23}{13}}{\binom{39}{13}}, \text{ za svaki } 1 \leq i < j \leq 4.$$

Kada pogledamo događaj $A_i \cap A_j \cap A_k$, shvaćamo da je on nemoguć, jer u tom slučaju imamo 3 igrača koja trebaju dobiti $3 \cdot 13 = 39$ karata koje nisu korisne, dok mi na raspolaganju imamo njih 36. Prema Teoremu 3.1, tvrdnji o vjerojatnosti nemogućeg događaja, je $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 0$, što će vrijediti i za događaj $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

Dakle, sada je

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = 4 \cdot P(A_1) - 6 \cdot P(A_1 \cap A_2) = 4 \cdot \frac{\binom{36}{13}}{\binom{52}{13}} - 6 \cdot \frac{\binom{36}{13}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{23}{13}}{\binom{39}{13}} \approx 0.01455.$$

Primjer 4.2 *Na jednom školskom natjecanju iz graničara natječu se 4 ekipe od kojih se svaka sastoji od pet učenika i to tri osmaša i dva sedmaša. Od svih sudionika natjecanja slučajno odaberemo 6 učenika. Kolika je vjerojatnost da*

(a) među izabranim učenicima su točno dva osmaša?

(b) među izabranim učenicima je barem jedan učenik iz svake ekipe?

Rješenje I u jednom i u drugom slučaju će nam biti potreban prostor elementarnih događaja, a ovdje je to $\Omega = \{\textit{svi 6-člani podskupovi skupa od 20 elemenata}\}$. Stoga je $k(\Omega) = \binom{20}{6}$. Tražene događaje označit ćemo s

$$A = \{\textit{među izabranim učenicima su točno dva osmaša}\}$$
$$B = \{\textit{među izabranim učenicima je barem jedan učenik iz svake ekipe}\}.$$

Kako bismo izračunali vjerojatnost događaja A moramo odrediti kardinalni broj tog skupa. Budući da imamo $3 \cdot 4 = 12$ osmaša i $2 \cdot 4 = 8$ sedmaša, a biramo 6 učenika od kojih želimo da budu točno dva osmaša $k(A) = \binom{12}{2} \cdot \binom{8}{4}$. Sada možemo izračunati vjerojatnost primjenjujući klasičnu definiciju vjerojatnosti

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{20}{6}} \approx 0.1192.$$

Događaj B prikazat ćemo na sljedeći način:
ako označimo s

$$B_i = \{\text{\emph{među izabranim učenicima je barem jedan učenik iz i-te ekipe}}\}, i = 1, 2, 3, 4,$$

onda je

$$B = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4.$$

Dakle,

$$P(B) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4).$$

Kako nam je, u ovom slučaju, lakše raditi sa suprotnim događajima, promotrimo sljedeći događaj:

$$B_i^{\mathcal{C}} = \{\text{\emph{među izabranim učenicima nema niti jednog iz i-te ekipe}}\}.$$

Sada ćemo imati

$$P(B) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = P((B_1^{\mathcal{C}} \cup B_2^{\mathcal{C}} \cup B_3^{\mathcal{C}} \cup B_4^{\mathcal{C}})^{\mathcal{C}}). \tag{10}$$

Koristeći svojstvo vjerojatnosti suprotnog događaja iz Teorema 3.1, dobivamo sljedeće

$$P(B_1^{\mathcal{C}} \cup B_2^{\mathcal{C}} \cup B_3^{\mathcal{C}} \cup B_4^{\mathcal{C}})^{\mathcal{C}}) = 1 - P(B_1^{\mathcal{C}} \cup B_2^{\mathcal{C}} \cup B_3^{\mathcal{C}} \cup B_4^{\mathcal{C}}), \tag{11}$$

što je prema Sylvesterovoj formuli

$$\begin{aligned} P(B_1^{\mathcal{C}} \cup B_2^{\mathcal{C}} \cup B_3^{\mathcal{C}} \cup B_4^{\mathcal{C}}) = {} & P(B_1^{\mathcal{C}}) + P(B_2^{\mathcal{C}}) + P(B_3^{\mathcal{C}}) + P(B_4^{\mathcal{C}}) - P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}}) \\ & - P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}}) - P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) - P(B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}}) \\ & - P(B_2^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) - P(B_3^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) + P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}}) \\ & + P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) + P(B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) \\ & - P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}). \end{aligned} \tag{12}$$

Kada (11) i (12) uvrstimo u (10) dobivamo da je vjerojatnost događaja B

$$\begin{aligned} P(B) = 1 & - P(B_1^{\mathcal{C}}) - P(B_2^{\mathcal{C}}) - P(B_3^{\mathcal{C}}) - P(B_4^{\mathcal{C}}) + P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}}) \\ & + P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}}) + P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) + P(B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}}) + P(B_2^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) \\ & + P(B_3^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) - P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}}) - P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) \\ & - P(B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}) + P(B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}). \end{aligned} \tag{13}$$

Sada treba izračunati sve vjerojatnosti koje su nam potrebne kako bismo izračunali vjerojatnost traženog događaja. Budući da želimo odabrati šest učenika, a da pri tome niti jedan od tih šest nije iz i-te ekipe,

$$k(B_i^{\mathcal{C}}) = \binom{5}{0} \cdot \binom{15}{6} = \binom{15}{6},$$

pa je

$$P(B_i^{\mathcal{C}}) = \frac{\binom{15}{6}}{\binom{20}{6}}, i = 1, 2, 3, 4.$$

Nakon toga, tražimo vjerojatnost događaja $B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}}, i \neq j$, to jest želimo odabrati šest učenika tako da niti jedan nije iz i-te ekipe i niti jedan nije iz j-te ekipe pa je

$$k(B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}}) = \binom{10}{0} \cdot \binom{10}{6} = \binom{10}{6}, i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j,$$

$$P(B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}}) = \frac{k(B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}})}{k(\Omega)} = \frac{\binom{10}{6}}{\binom{20}{6}}.$$

Nadalje, vidimo da je događaj $B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}} \cap B_k^{\mathcal{C}}$ nemoguć jer u našem izboru od šest učenika ne bi trebao biti niti jedan učenik iz 3 ekipe, što nam ostavlja $20 - 15 = 5$ učenika od kojih bismo trebali izabrati 6, a to je nemoguće. Prema vjerojatnosti nemogućeg događaja iz Teorema 3.1 slijedi $P(B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}} \cap B_k^{\mathcal{C}}) = 0, i \neq j \neq k, i, j, k = 1, 2, 3, 4$. Očito je da će i događaj $B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}$ biti nemoguć pa će i njegova vjerojatnost biti jednaka 0.

Nakon što sve izračunato uvrstimo u (13), dobivamo

$$P(B) = 1 - 4 \cdot \frac{\binom{15}{6}}{\binom{20}{6}} + 6 \cdot \frac{\binom{10}{6}}{\binom{20}{6}} - 3 \cdot 0 + 0 \approx 0.51599.$$

Sljedećim primjerom pokazat ćemo kako odrediti vjerojatnost da slučajnim odabirom više proizvoda uzmemo nekoliko neispravnih. Taj primjer poznat je i pod nazivom *kontrola kvalitete.*

Primjer 4.3 *Pretpostavimo da u kutiji imamo 600 Tamagotchi igračaka, od kojih je 3% neispravno. Kolika je vjerojatnost da smo slučajnim odabirom 30 igračaka uzeli točno tri neispravne igračke?*

Rješenje U kutiji imamo 3% neispravnih igračaka, što znači da je od njih 600, 18 neispravnih. Mi slučajno odabiremo 30 igračaka, a budući da nas zanima kolika je vjerojatnost da su točno tri neispravne, nije nam važan raspored. Stoga su svi mogući ishodi našeg izvlačenja zapravo 30-člani podskupovi skupa od 600 elemenata, odnosno naš prostor elementarnih događaja će biti

$$\Omega = \{\textit{sve kombinacije 30-og razreda skupa od 600 elemenata}\}.$$

To znači da je $k(\Omega) = \binom{600}{30}$. Neka je sada $A \subset \Omega$, gdje je

$$A = \{\textit{između 30 slučajno odabranih igračaka točno su 3 neispravne}\}$$

te trebamo naći $k(A)$. Budući da nam je poznato da je 18 igračaka neispravnih, znamo da ćemo 3 neispravne odabrati između tih 18, a to možemo učiniti na $\binom{18}{3}$ načina. Kako smo odabrali 3 neispravne, ostaje nam odabrati $30 - 3 = 27$ igračaka između $600 - 18 = 582$ ispravne igračke što možemo učiniti na $\binom{582}{27}$ načina. Sada imamo da je $k(A) = \binom{18}{3}\binom{582}{27}$. Na kraju, vjerojatnost da smo slučajnim odabirom 30 igračaka uzeli točno 3 neispravne je, prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti, jednako

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{\binom{18}{3}\binom{582}{27}}{\binom{600}{30}} \approx 0.0458.$$

Ovaj primjer možemo i poopćiti: pretpostavimo da imamo skup od n proizvoda među kojima je i neispravnih ili oštećenih (škart roba). Kolika je vjerojatnost da između m slučajno odabranih proizvoda iz tog skupa bude točno j neispravnih? (Jasno nam je da je $m \leq n$ i $j \leq i$).

Kao i u prethodnom primjeru, mogući ishodi ovog pokusa su svi $m-$člani podskupovi skupa od n elemenata pa je jasno da ih ima $\binom{n}{m}$. Sada trebamo saznati koliko je među njima podskupova koji sadrže točno j neispravnih. Taj broj ćemo dobiti tako da prvo izaberemo proizvoljnih j od i neispravnih, a zatim ih kombiniramo sa $m - j$ koje smo odabrali od $n - i$ ispravnih proizvoda. Prvi izbor možemo napraviti na $\binom{i}{j}$ dok drugi možemo napraviti na $\binom{n-i}{m-j}$ načina. Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju i definiciji vjerojatnosti, tražena vjerojatnost je

$$\frac{\binom{i}{j}\binom{n-i}{m-j}}{\binom{n}{m}}.$$

Način zaključivanja, opisan iznad, možemo primijeniti i na sljedećem primjeru.

Primjer 4.4 *U šeširu imamo n kuglica: n_1 kuglica jedne boje, n_2 kuglica druge boje, $\ldots$, n_m kuglica m-te boje. Pri tome je $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ te iz šešira izvlačimo k kuglica. Kolika je vjerojatnost da je među k izvučenih kuglica k_1 kuglica prve boje, k_2 druge boje, $\ldots$, k_m m-te boje s tim da je $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$?*

Rješenje Očito je $k(\Omega) = \binom{n}{k}$, a ako naš traženi događaj označimo s A, primjenom teorema o uzastopnom prebrojavanju dobivamo

$$k(A) = \binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{n_m}{k_m}$$

te je tražena vjerojatnost

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{n_m}{k_m}}{\binom{n}{k}}.$$

Pogledajmo u nastavku još jedan zanimljiv primjer, poznatiji kao De Méréov paradoks.

Primjer 4.5 (De Méréov paradoks) *Igra se sastoji od bacanja triju igraćih kockica. Promatramo dva događaja: ukupan zbroj brojeva na kockicama je 11 i ukupan zbroj brojeva na kockicama je 12. Označimo ih ovako:*

$$A_1 = \{\textit{ukupan zbroj brojeva je 11}\}$$

$$A_2 = \{\textit{ukupan zbroj brojeva je 12}\}.$$

De Méré je razmišljao da bi se oba događaja trebala pojavljivati podjednako puta, jer se A_1 pojavljuje u točno 6 slučajeva, isto kao i događaj A_2:

$$A_1 = \{(6,4,1),(6,3,2),(5,5,1),(5,4,2),(5,3,3),(4,4,3)\}$$

$$A_2 = \{(6,5,1),(6,4,2),(6,3,3),(5,5,2),(5,4,3),(4,4,4)\}$$

No, promatranjem i bilježenjem rezultata primijetio je da se događaj A_1 pojavljuje više puta nego A_2. Grešku u njegovom razmišljanju uočio je Pascal. Zaključio je da svi ishodi koje je De Méré uočio ipak nisu jednako vjerojatni.

U ovom pokusu prostor elementarnih događaja je

$$\Omega = \{(i,j,k) : i,j,k = 1,2,\dots,6\},$$

stoga je $k(\Omega) = \bar{V}_6^3 = 6^3 = 216$. Kada gledamo događaje A_1 i A_2, vidimo da mogućnosti da će na tri kocke pasti različiti brojevi ima $P_3 = 6$, mogućnosti da će na dvije kocke pasti isti brojevi ima $\bar{P}_3^{(2,1)} = 3$, a mogućnost da na sve tri kocke padnu isti brojevi je samo jedna. Prema tome zaključujemo

$$k(A_1) = 6+6+3+6+3+3 = 27$$

$$k(A_2) = 6+6+3+3+6+1 = 25.$$

Uočavamo da je $k(A_1) > k(A_2)$ pa je samim time i $P(A_1) > P(A_2)$.

Kombinatoriku i teoriju vjerojatnosti možemo primjenjivati i u drugim područjima, kao na primjer u fizici. U tome će nam pomoći primjer razdiobe kuglica po kutijama.

Primjer 4.6 (Razdioba kuglica po kutijama) *Na slučajan način radimo razdiobu r kuglica u n kutija. Kutije ćemo označiti s $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Svaku kuglicu možemo staviti u jednu kutiju, stoga ćemo svaki ishod našeg pokusa razdiobe r kuglica u n kutija označiti $r-$torkom $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$, gdje a_{i_k} označava kutiju u koju smo smjestili $k-$tu kuglicu, za $k = 1, 2, \ldots, r$. Možemo promatrati nekoliko mogućnosti:*

- *u svakoj kutiji može biti proizvoljno mnogo kuglica, tada u $r-$torci može biti jednakih elemenata*
- *u svakoj kutiji ne može biti više od jedne kuglice, tada su u $r-$torci elementi različiti*
- *kuglice međusobno razlikujemo, tada je $r-$torka uređena*
- *kuglice ne razlikujemo međusobno, tada je $r-$torka neuređena.*

Pogledajmo sada sljedeće slučajeve i njihovu primjenu:

1. *Ako u svakoj kutiji može biti proizvoljno mnogo kuglica i kuglice razlikujemo, ukupan broj mogućih razdioba r kuglica u n kutija bit će jednak broju svih varijacija s ponavljanjem, tj. $\bar{V}_n^{(r)} = n^r$.*

   U fizici, kutije možemo interpretirati kao energetske nivoe, a kuglice kao čestice. Maxwell-Boltzmannova hipoteza kaže da su sve razdiobe jednako vjerojatne [4].

2. *Ako u svakoj kutiji može biti proizvoljno mnogo kuglica i kuglice ne razlikujemo, ukupan broj mogućih razdioba r kuglica u n kutija je jednak broju svih kombinacija s ponavljanjem $r-$tog razreda u skupu od n elemenata, odnosno broj svih ovakvih razdioba jednak je $\bar{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$.*

   Ako imamo istu interpretaciju iz fizike kao i u prethodnom slučaju, tada nam Bose-Einsteinova hipoteza govori da su sve te razdiobe jednako vjerojatne.

3. *Ako je $r \leq n$, svaka kutija može primiti najviše jednu kuglicu i kuglice ne razlikujemo, tada je ukupan broj razdioba jednak broju svih kombinacija $r-$tog razreda u $n-$članom skupu, odnosno taj broj je $C_n^{(r)} = \binom{n}{r}$.*

   Opet s istom interpretacijom iz fizike kao u prethodna dva slučaja, Fermi-Diracova hipoteza tvrdi da su sve ovakve razdiobe jednako vjerojatne.

4. *Ako je $r \leq n$, svaka kutija može primiti najviše jednu kuglicu i kuglice razlikujemo, tada je broj svih razdioba jednak broju svih varijacija $r-$tog razreda u $n-$članom skupu, to jest $V_n^{(r)} = n(n-1)\ldots(n-r+1)$.*

Mnogi problemi mogu se svesti upravo na razdiobu r kuglica u n kutija kao na primjer: mjerenje kozmičkog zračenja (Griegovi brojači su kutije, a čestice koje padaju na brojače su kuglice), bacanje r igraćih kockica (razdioba r kuglica u $n = 6$ kutija), bacanje simetričnog novčića r puta (razdioba r kuglica u $n = 2$ kutije)...

Još jedan zanimljiv primjer koji se može primjenjivati na različite pokuse je sličan prethodnom primjeru, no u ovom slučaju izvlačimo kuglice iz kutije.

Primjer 4.7 *U kutiji imamo n različitih kuglica (kuglice smo označili brojevima) i iz te kutije slučajnim odabirom biramo r kuglica. Uvjeti mogu biti različiti, a mi ćemo promotriti neke mogućnosti:*

1. *Izabiranje s vraćanjem i uređajem. Kuglice izvlačimo tako da izvučemo kuglicu, zabilježimo njenu oznaku te ju vratimo u kutiju i to ponavljamo r puta. Rezultat našeg pokusa je uređena $r-$torka $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ u kojoj svaki a_j označava kuglicu koja je izvučena u $j-$tom izvlačenju, $j = 1, 2, \ldots, r$. Stoga zaključujemo da se ovdje radi o varijacijama s ponavljanjem $r-$tog razreda u $n-$članom skupu pa je ukupan broj različitih jednako vjerojatnih ishoda jednak $\bar{V}_n^{(r)} = n^r$.*

2. *Izabiranje bez vraćanja i s uređajem. Slučaj u kojem izvlačimo kuglicu i ne vraćamo ju u kutiju, ali i dalje bilježimo redoslijed izvlačenja. Rezultat ovog pokusa su uređene $r-$torke čiji se elementi međusobno razlikuju. U ovom slučaju mora biti $r \leq n$ jer ne možemo izvući više kuglica nego što ih je u kutiji. Broj svih različitih jednako vjerojatnih ishoda bit će jednak broju varijacija $r-$tog razreda $n-$članog skupa, stoga ih ukupno ima*
   $V_n^{(r)} = n(n-1)\ldots(n-r+1)$.

3. *Izabiranje bez vraćanja i bez uređaja. U ovom slučaju kuglice izvlačimo, ali ih ne vraćamo u kutiju i nije nam bitan redoslijed kojim izvlačimo kuglice. Ovaj slučaj možemo poistovjetiti s time da odjednom izvučemo r kuglica. Očito je da je $r \leq n$, a rezultat pokusa će biti $r-$člani podskup $n-$članog skupa, pa će broj različitih jednako vjerojatnih ishoda biti jednak broju kombinacija $r-$tog razreda $n-$članog skupa, odnosno $C_n^{(r)} = \binom{n}{r}$.*

4. *Izabiranje s vraćanjem i bez uređaja. U zadnjem slučaju koji ćemo promatrati, kuglice nakon svakog izvlačenja vraćamo u kutiju i nije nam bitan redoslijed kojim smo izvukli kuglice, već nam je bitno koje kuglice smo izvukli. Ovdje će rezultat pokusa biti neuređena $r-$torka u kojoj se elementi mogu i ponavljati. Stoga nam je jasno da se ovdje radi o kombinacijama s ponavljanjem $r-$tog razreda u $n-$članom skupu pa je broj različitih jednako vjerojatnih ishoda jednak $\bar{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$.*

4.1 Primjeri koji povezuju kombinatoriku i uvjetnu vjerojatnost

Preostaje nam pokazati na koji način možemo povezati kombinatoriku i uvjetnu vjerojatnost, a to ćemo ilustrirati sljedećim primjerima.

Primjer 4.8 *Slučajan pokus se sastoji od bacanja dvije simetrične igraće kockice. Događaji koje ćemo promatrati su definirani na sljedeći način:*

$$A = \{\textit{na prvoj kockici je pao broj 2}\}$$

$$B = \{\textit{suma brojeva na obje kockice je 6}\}.$$

Kolika je vjerojatnost događaja A ako nam je poznato da se realizirao događaj B?

Rješenje Naš skup elementarnih događaja bit će:

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,\dots,6\}\}$$

pa je $k(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$. Zapišimo sada matematički naše događaje:

$$A = \{(2,j) : j \in \{1,2,\dots,6\}\} = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

$$B = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,\dots,6\} \wedge i+j=6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

Budući da je kod događaja A poznato da je uvijek na prvoj kockici 2, jasno nam je da je $k(A) = 6$, dok je kod događaja B poznato da je suma brojeva na kockicama 6 pa imamo $k(B) = 5$. Kao što vidimo, prebrojavali smo elemente skupova i dobili kardinalne brojeve tih skupova. Iz formule za izračunavanje uvjetne vjerojatnosti (8) vidimo da će nam biti potreban skup

$$A \cap B = \{(2,j) : j \in \{1,2,\dots,6\} \wedge i+j=6\} = \{(2,4)\}$$

te je očito $k(A \cap B) = 1$. Sada, prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti, računamo

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)}}{\frac{k(B)}{k(\Omega)}} = \frac{k(A \cap B)}{k(B)} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Ono što možemo zaključiti iz ovog primjera jest da se računanje uvjetne vjerojatnosti može svesti na računanje kardinalnih brojeva odgovarajućih skupova te samim time i formulu uvjetne vjerojatnosti (u slučaju kada vrijede pretpostavke dane u klasičnoj definiciji vjerojatnosti) možemo zapisati kao

$$P_B(A) = \frac{k(A \cap B)}{k(B)},$$

što slijedi direktno iz (8) i klasične definicije vjerojatnosti.

Primjer 4.9 *Jedan plesni klub treba odraditi nastup s 20 plesača, no zbog godišnjih odmora, imaju samo 15 plesača, stoga odluče posuditi plesače iz drugog plesnog kluba. U drugom plesnom klubu ima 20 plesača, 7 muškaraca i 13 žena, te su svi plesači spremni pomoći. Voditelj kluba nasumično odabire plesače. Ako znamo da su svi odabrani plesači istog spola, kolika je vjerojatnost da su svi muškarci?*

Rješenje Budući da odabiremo 5 plesača iz drugog kluba od njih 20, vrijedi $k(\Omega) = \binom{20}{5}$. Ono što znamo je da su svi odabrani plesači istog spola, a zanima nas kolika je vjerojatnost da su svi muškarci te ćemo definirati sljedeće događaje

$$A = \{\textit{odabrani plesači su muškarci}\}$$

$$B = \{\textit{odabrani plesači su istog spola}\}.$$

Možemo primijetiti da je $A \subseteq B$ pa prema svojstvu monotonosti vjerojatnosti iz Teorema 3.1, zaključujemo da će biti $P(A) \leq P(B)$ što možemo i pokazati.

Očito je

$$k(A) = \binom{7}{5}$$

$$k(B) = \binom{7}{5} + \binom{13}{5},$$

odnosno

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{20}{5}} \approx 0.00135 \leq 0.08437 \approx \frac{\binom{7}{5} + \binom{13}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = P(B).$$

Tražimo vjerojatnost da su odabrani plesači muškarci, pod uvjetom da su svi odabrani plesači istog spola. Dakle,

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}, \text{ jer je } A \subseteq B,$$

iz čega slijedi

$$P_B(A) = \frac{\frac{k(A)}{k(\Omega)}}{\frac{k(B)}{k(\Omega)}} = \frac{k(A)}{k(B)} = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{7}{5} + \binom{13}{5}} \approx 0.0161.$$

Primjer 4.10 *U Tromagijskom turniru sudjeluju tri čarobnjaka iz tri različite škole. Jednako je vjerojatno da su odabrani učenici ili učenice i bilježimo redoslijed odabira zbog poretka izvršavanja zadataka. Jesu li sljedeća dva događaja nezavisna:* $A =$\{*odabrana je barem jedna učenica*\}, $B =$\{*odabrane su dvije učenice i učenik*\}?

Rješenje Za početak, odredimo Ω, gdje ćemo s b označiti učenika, a s g učenicu.

$$\Omega = \{(b,b,b),(b,b,g),(b,g,b),(g,b,b),(b,g,g),(g,b,g),(g,g,b),(g,g,g)\}, k(\Omega) = 8$$

Znamo da će događaji A i B biti nezavisni, ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Kako je

$$A = \{(b,b,g),(b,g,b),(g,b,b),(b,g,g),(g,b,g),(g,g,b),(g,g,g)\}, k(A) = 7$$

$$B = \{(b,g,g),(g,b,g),(g,g,b)\}, k(B) = 3$$

$$A \cap B = \{(b,g,g),(g,b,g),(g,g,b)\}, k(A \cap B) = 3,$$

prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti računamo sljedeće

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{7}{8}$$

$$P(B) = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)} = \frac{3}{8}.$$

Sada vrijedi

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \neq \frac{21}{64} = P(A) \cdot P(B),$$

čime smo pokazali da događaji nisu nezavisni.

Zaključak

Ljudi su se oduvijek bavili kombinatorikom i teorijom vjerojatnosti, a vidjeli smo koliko su se te dvije grane matematike razvile od korištenja u igrama na sreću do rješavanja vjerojatnosnih problema koji su primjenjivi na različite situacije u životu. Na osnovu različitih definicija, teorema i svojstava povezali smo kombinatoriku i teoriju vjerojatnosti te smo riješili mnoge zanimljive vjerojatnosne probleme uz korištenje kombinatornih principa. Sada, na primjer, znamo da koristeći definiciju klasične vjerojatnosti možemo doći od formule uključivanja-isključivanja do Sylvesterove formule. Vjerojatnost da ne dobijemo niti jednu jaku kartu je zaista mala, dok ćemo, ako odaberemo 30 igračaka, morati malo više paziti kako ne bismo uzeli 3 neispravne. Zadatak kombinatorike u tome je da nam pomogne pri prebrojavanju svih mogućih događaja u određenom problemu. Na kraju možemo zaključiti kako kombinatorika zaista ima veliku primjenu u različitim vjerojatnosnim problemima.

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[3] F. N. David, *Games, Gods, and Gambling: A History of Probability and Statistical Ideas*, Dover publication, inc., Mineola, 1998.

[4] N. Elezović, *Teorija vjerojatnosti*, Element, Zagreb, 1995.

[5] A. de Moivre, *Doctrine of chances*, A. Millar, London, 1756.

[6] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika I. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[7] Š. Ungar, *Uvod u teoriju skupova i matematičku logiku (nerecenzirani materijal)*, https://www.mathos.unios.hr/ sime/HR/skupovi/skupovi.pdf

Sažetak

U ovom diplomskom radu opisujemo primjenu osnovnih principa kombinatorike u teoriji vjerojatnosti. U prvom poglavlju dan je povijesni pregled kombinatorike i teorije vjerojatnosti te su naznačeni samo neki od važnih matematičara koji su doprinijeli njihovom razvoju. Nadalje, u drugom poglavlju opisani su osnovni kombinatorni principi, te smo na raznim primjerima ilustrirali navedene definicije. Treće poglavlje donosi nam vjerojatnosni prostor, klasičnu definiciju vjerojatnosti, njena osnovna svojstva te uvjetnu vjerojatnost. Sve to bit će potrebno kako bismo u četvrtom poglavlju primijenili kombinatorne principe na vjerojatnosne probleme kroz niz različitih zanimljivih zadataka.

Ključne riječi: kombinatorika, teorija vjerojatnosti, varijacije, permutacije, kombinacije, klasična definicija vjerojatnosti, uvjetna vjerojatnost.

Summary

In this paper we describe the applications of the basic principles of the combinatorics in probability theory. The first chapter provides a historical overview of combinatorics and probability theory and outlines some of the important mathematicians who have contributed to its development. Furthermore, the second chapter describes the basic combinatorial principles and we applied given definitions to various examples. Chapter three brings us the probability space, the classical definition of probability, its basic properties and the conditional probability. All of this will be necessary in chapter four to apply combinatorial principles to probabilistic problems through a number of different interesting tasks.

Keywords: combinatorics, probability theory, variations, pemutations, combinations, classical definition of probability, conditional probability.

Životopis

Rođena sam 30.9.1993. godine u Đakovu. Osnovnu školu Ivana Gorana Kovačića u Đakovu pohađala sam od 2000. do 2008. godine, a tada upisujem Gimnaziju Antuna Gustava Matoša, također u Đakovu, koju završavam 2012. godine. Nakon gimnazije, upisujem integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.